کاربرد روش بدون المان SSPH در تحلیل ارتعاشات آزاد گرافن*

مقاله علمی – پژوهشی

کوروش محمدی[۱] حسن شکراللهی[۲]

چکیده *در این مقاله روش هیدرودینامیک ذرات هموار متقارن (SSPH)، برای بررسی ارتعاشات آزاد گرافن دو لایه با در نظر گرفتن اثر برشی بین لایه‌ها استفاده می‌شود. شرایط مرزی گیردار- آزاد و فاصله بین دو لایه بیرونی در حین تغییر شکل ثابت فرض می‌شود. معادلات حاکم با در نظر گرفتن تئوری تیر اویلر- برنولی برای هر لایه و در نظر گرفتن جابجایی داخل صفحه علاوه بر جابجایی عرضی، به دست می‌آید. با حل معادلات حاکم به روش SSPH فرکانس‌های اول و دوم محاسبه شده است. این نتایج با نتایج شبیه سازی دینامیک مولکولی و نتایج به دست آمده از حل عددی معادله حاکم به روش GDQ که از مراجع دیگر استخراج شده است، مقایسه شده است و دقّت و درستی روش حل بدون مش SSPH نشان داده شده است.*

واژه‌های کلیدی روش بدون مش، گرافن دو لایه، ارتعاشات آزاد، تیر ساندویچی، روش SSPH.

Application of SSPH Method in Free Vibration Analysis of Graphene

K. Mohammadi H. Shokrollahi

Abstract *In this paper, the symmetric smoothed particle hydrodynamics (SSPH) as a meshless method is explained in detail. Free vibration analysis of bilayer graphenes with interlayer shear effect is modeled. The bilayer graphene is modeled as a sandwich beam with free-clamp end condition. To obtain the governing equations, each graphene layer is modeled based on the Euler-Bernoulli theory and in-plane displacements are also considered in addition to the transverse displacement. It is also assumed that the graphene layers do not have relative displacement during vibration. The results obtained by the sandwich beam model solved by SSPH method, include the first two natural frequencies of the bilayer graphenes. These results are validated by the molecular dynamic and compared with the GDQM results reported in the literature.*

Key Words Meshless Method, Bilayer Graphene, Free Vibration, Sandwich Beam Model, SSPH Method.

---

* تاریخ دریافت مقاله ۹۸/۱۰/۱۸ و تاریخ پذیرش آن ۹۹/٤/۱۰ می‌باشد.

DOI:10.22067/fum-mech.v31i2.84997

(۱) کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران

(۲) نویسندهٔ مسئول، استادیار، مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران.

Email: hshokrollahi@khu.ac.ir

مقدّمه

برای مدّت زمان زیادی، روش اجزا محدود (FEM) یک روش استاندارد برای حلِّ عددی گسترهٔ وسیعی از چالش‌های مهندسی بوده است. مسأله‌ها و چالش‌های جهان امروزی به‌مراتب شکل پیچیده‌تری به خود گرفته‌اند، بنابراین روش اجزا محدود به‌تنهایی قادر به حلِّ این مسائل نبوده و ناکافی است. برخی از محدودیت‌های روش اجزا محدود عبارت‌اند از:

۱. تولید یک مش باکیفیت خوب با توجّه به هندسه و شرایط فیزیکی، مسأله همیشه آسان نیست، به‌عنوان‌مثال در تغییر شکل و کرنش‌های بزرگ؛
۲. تولید و اصلاح مش در روش اجزا محدود از نظر محاسباتی هزینه‌بر است؛
۳. در مکانیک شکست در مباحث مربوط به رشد ترک‌ها، بخصوص در میکرو ترک‌ها و همچنین در ترک‌هایی که مسیر آن پیچیده است، به دلیل لزوم وجود یک مش باکیفیت، روش اجزا محدود ممکن است جواب‌هایی نادرست به دست دهد؛
٤. در ناپیوستگی‌ها و یا در مرز دو فاز از ماده، استفاده از روش اجزا محدود غیر ممکن و یا بسیار هزینه‌بر است.

با توجّه به محدودیت‌های روش اجزا محدود، توسعه سایر روش‌های حل عددی که توانایی حل مسأله‌های پیچیده را بدون استفاده از مش داشته باشد، بسیار ضروری است. روش‌های بدون مش برای غلبه بر محدودیت‌های روش اجزا محدود توسعه داده‌شده‌اند. این روش‌ها نیازی به مش برای گسسته سازی دامنه حل ندارند، بلکه از یک سری توابع تقریب و یک دسته نقاط برای تخمین توابع استفاده می‌کنند. برخی از مزایای روش‌های بدون مش نسبت به روش اجزا محدود عبارت‌اند از:

۱. هزینهٔ محاسبات به دلیل عدم نیاز به وجود مش، کاهش می‌یابد؛
۲. دقّت بیشتر در محاسبات به‌آسانی تنها با اضافه کردن نقاط به دامنهٔ حل، به‌خصوص در محل‌هایی که نیاز به اصلاح دارد، قابل دستیابی است؛
۳. مسائل مربوط به تغییر شکل‌های بزرگ و آنی و همچنین مسائل غیرخطی به‌راحتی با روش‌های بدون مش قابل مدل‌سازی هستند، زیرا که فاصلهٔ بین نقاط در حین انجام محاسبات به‌صورت اتوماتیک تولید می‌شود و با تغییر زمان نیز تغییر می‌کند [1].

روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) (Smoothed Particle Hydrodynamics)، یک روش لاگرانژی بدون نیاز به مش است که از یک روش درون‌یابی نقطه‌ای برای محاسبهٔ میدان متغیرهای هموار استفاده می‌کند. هر نقطه (ذرّه) یک جرم، مختصات لاگرانژی، سرعت لاگرانژی و انرژی درونی دارد؛ سایر مقادیر به‌وسیلهٔ درون‌یابی و یا از روابط ساختاری به دست می‌آید. ذرّه‌ها با سرعت محیط پیوسته حرکت می‌کنند، اما با یک شبکه همراه نیست و درنتیجه اتصال ثابت ندارند [2].

روش هیدرودینامیک ذرات هموار، کاملاً یک روش بدون نیاز به استفاده از مش است که اصولاً در محیط‌های پیوسته کاربرد دارد و می‌توان به‌عنوان قدیمی‌ترین روش‌های بدون مش از آن یاد کرد. این روش حل در ابتدا برای پاسخ به مسائل فیزیکی مطرح در نجوم، در حالت سه‌بعدی بدون شرایط مرزی (خلأ)، مانند انفجار ستارگان، دینامیک ابرها و ... توسط لوسی [3]، جینگولد و موناقان [4] در سال ۱۹۷۷ میلادی ابداع و گسترش داده شد. ابتکار آنها، محاسبه مشتق‌های یک تابع بدون استفاده از ساختار محاسباتی مش است. تابع تقریب (تابع هسته) جزء اصلی روش SPH است و محقّقان بسیاری از جمله موناقان و لاتانزیو [5]، بلسارا [6]، لیو و همکاران [7,8] در این زمینه بحث کرده و توابعی را پیشنهاد داده‌اند. لیبرسکی و پتچک روش SPH را برای کار با تانسورهای تنش و مواد مقاوم (جامدات) در حالت دوبعدی و سه‌بعدی گسترش دادند [9,10]. با به‌کارگیری روش SPH در مدل‌سازی جامدات، دو محدودیت ذاتی موجود در اصل این روش بیشتر بروز

پیدا کرد؛ نبود دقّت در نقاط مرزی و پدیده ناپایداری کششی (Tensile instability). تلاش برای رفع این محدودیت‌ها و افزایش کارایی روش SPH منجر به ظهور روش‌های بدون مش دیگری از بطن این روش شد؛ مانند روش EFGM (Element Free Galerkin Method)، روش RKPM (Reproducing Kernel Particle Method)، روش MLSPH (Moving Least Square Particle Hydrodynamics) و روش MLPG (Meshless Local Petrov Galerkin Method)[2].

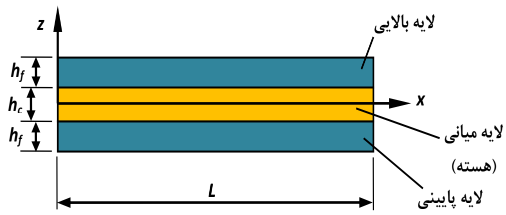
روش هیدرودینامیک ذرات هموار متقارن (SSPH) (Symmetric Smoothed Particle Hydrodynamics) توسط باترا و ژانگ در سال ۲۰۰۷ میلادی برای تحلیل عددی مسایل تنش- کرنش در حالت الاستیک پیشنهاد شد. این روش حل، ماتریس ضرایب را به‌صورت متقارن محاسبه می‌کند و ضرایب مشتقات تابع هسته را ضرایب غیر از صفر قرار می‌دهد و همچنین تقریب بهتری از جواب را نسبت به روش MLSPH نتیجه می‌دهد [11].

گرافن، به‌عنوان نازک‌ترین سازه از پیوند کووالانسی بین اتم‌های کربن که به‌صورت ساختار لانه‌زنبوری در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند و به دلیل دارا بودن خواص ویژهٔ مکانیکی، الکتریکی، اپتیکی و حرارتی و همچنین هزینهٔ تولید به نسبت پایین آن، مورد توجّه ویژه پژوهشگران قرار گرفته است. گرافن با مدول الاستیک درون صفحه‌ای برابر با ۱ تراپاسکال قوی‌ترین سازهٔ شناخته شده در سال‌های اخیر بوده است [12]. همچنین مدول برشی بین لایه‌ای در گرافن‌های چند لایه در حدود ۲۵/۰ گیگاپاسکال است. در بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی گرافن‌های چندلایه، از روش‌های مختلفی مانند شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، مکانیک مولکولی و مکانیک محیط‌های پیوسته، استفاده می‌شود. به‌منظور بررسی اثر برش بین لایه‌ای، مدل تیر چندگانه برشی توسط لیو و همکارانش [13] پیشنهاد شده است. آنها با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی و با صرف‌نظر کردن از جابجایی‌های درون صفحه‌ای و در نظر گرفتن صرفاً جابجایی عرضی یکسان برای تمامی لایه‌های گرافن چندلایه، عبارت برش را در معادلات حرکت تیر اویلر-برنولی اعمال نموده و مدل جدیدی به نام مدل تیر چندگانه برشی (Multi-Beam Shear Model (MBSM)) را ارائه نمودند که نتایج حاصل از روش فوق، همخوانی خوبی با نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی دارد. در مطالعهٔ دیگری، ناظم‌نژاد و همکاران [14] به دلیل شباهت گرافن دو لایه به تیر ساندویچی، از مدل تیر ساندویچی برای مدل‌سازی ارتعاشاتی آن استفاده کرده‌اند و سپس با استفاده از روش GDQM (Generalized Differential Quadrature Method) به حلّ عددی معادلات حاکم پرداخته‌اند.

در این مطالعه، از مدل تیر ساندویچی برای تحلیل عددی ارتعاشی گرافن دو لایه استفاده می‌شود. یک تیر ساندویچی با یک لایه میانی انعطاف‌پذیر که تنها قادر به تحمل نیروهای برشی است (برش بین صفحات گرافن) در نظر گرفته می‌شود. دو لایهٔ بیرونی تیر ساندویچی، صفحات گرافن را مدل می‌کند. در تحلیل از تئوری اویلر- برنولی استفاده می‌شود و جابجایی عرضی برای هر سه لایه ثابت فرض می‌شود. درنهایت، پس از استخراج معادلات حاکم، این معادلات با استفاده از روش SSPH گسسته سازی شده و مدهای اول و دوم فرکانس طبیعی محاسبه می‌شوند. دقّت فرکانس‌های محاسبه‌شده از روش SSPH با نتایج حاصل از روش‌های دینامیک مولکولی، تیر چندگانه برشی و مدل تیر ساندویچی حل‌شده به روش GDQM که از مراجع دیگر استخراج شده است، مقایسه می‌شود. لازم به ذکر است که با استفاده از فرض تیر برای صفحات گرافن، می‌توان به شناخت نسبی از رفتار مکانیکی گرافن‌ها دست یافت و می‌توان گفت فرض انجام شده در این مطالعه می‌تواند مقدمه‌ای بر ارائه مدل‌های جامع‌تر و کامل‌تر در تحلیل صفحات گرافنی باشد. با تعمیم مدل تیر به مدل صفحه‌ای و سپس مدل سه‌بعدی می‌توان سازهٔ مورد نظر را به‌طور دقیق‌تر و واقعی‌تر تحلیل کرد؛ بنابراین مدل تیر پایه و مقدمه‌ای بر تحلیل‌های دوبعدی و سه‌بعدی است.

فرمولاسیون و معادلات حاکم

در مدل‌سازی گرافن، تیر ساندویچی مطابق شکل (۱)، از سه لایه تشکیل شده است که لایهٔ میانی تنها قادر به تحمل نیروهای برشی است و به دلیل چگالی ناچیز از اینرسی آن صرف‌نظر می‌شود، جابجایی نسبی عرضی هر سه لایه ثابت و لایه‌های بالایی و پایینی از مواد همسانگرد تشکیل‌شده و از تئوری تیر اویلر – برنولی پیروی می‌کند. طول تیر L، عرض تیر b، و ضخامت‌های لایه‌های بیرونی و هسته به ترتیب h_f و h_c فرض می‌شود.



شکل (۱): شماتیک تیر ساندویچی (گرافن دو لایه)

روابط کرنش – جابجایی و تنش – کرنش

میدان جابجایی برای رویه بالایی، از رابطهٔ (۱) به دست می‌آید.

$$w_t(x,z,t) = w_1(x,t)$$
$$u_t(x.z.t) = u_1(x,t) - \left(z - \frac{h_c + h_f}{2}\right)\frac{\partial w_1(x,t)}{\partial x} \quad (۱)$$

که در آن $\frac{h_c}{2} \le z \le \frac{h_c}{2} + h_f$ و u_1 و w_1، به ترتیب جابجایی در راستای طولی و عرضی نقاط واقع بر صفحه میانی لایه بالایی است. برای لایه پایینی جابجایی به‌صورت رابطهٔ (۲) فرض می‌شود.

$$w_b(x,z,t) = w_2(x,t)$$
$$u_b(x,z,t) = u_2(x,t) - \left(z + \frac{h_c + h_f}{2}\right)\frac{\partial w_2(x,t)}{\partial x} \quad (۲)$$

که برای لایه پایینی $-h_f - \frac{h_c}{2} \le z \le -\frac{h_c}{2}$ است و u_2 و w_2، به ترتیب جابجایی در راستای طولی و عرضی نقاط واقع بر صفحهٔ میانی لایهٔ پایینی است. با توجّه به فرض ثابت بودن ضخامت لایهٔ میانی حین تغییر شکل و توزیع خطی در راستای طولی، رابطهٔ (۳) بیانگر میدان جابجایی لایهٔ میانی است.

$$w_c(x,z,t) = w_b(x,z,t) = w_t(x,z,t) = w(x,t)$$

$$u_c(x,z,t) = \frac{u_1(x,t)+u_2(x,t)}{2} + \frac{2z}{h_c}\left(\frac{u_1(x,t)-u_2(x,t)}{2} + \frac{h_f}{2}\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right) \quad (۳)$$

که در آن $\frac{h_c}{2} \le z \le \frac{h_c}{2}$. روابط کرنش – جابجایی نیز با توجّه به تئوری تیر اویلر – برنولی از روابط (٤) و (٥) به ترتیب برای لایهٔ بالایی و پایینی به دست می‌آیند.

$$\varepsilon_x^t(x,z,t) = \frac{\partial u_t(x,z,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} - \left(z - \frac{h_c+h_f}{2}\right)\frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial x^2} \quad (٤)$$

$$\varepsilon_x^b(x,z,t) = \frac{\partial u_b(x,z,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} - \left(z + \frac{h_c+h_f}{2}\right)\frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial x^2} \quad (٥)$$

لایهٔ میانی تنها قادر به تحمل نیروهای برشی است و رابطهٔ کرنش – جابجایی آن به‌صورت رابطهٔ (٦) به دست می‌آید.

$$\gamma_{xz}^c(x,z,t) = \frac{\partial w_3(x,z,t)}{\partial x} + \frac{\partial u_c(x,z,t)}{\partial z} = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \frac{2}{h_c}\left(\frac{u_1(x,t)-u_2(x,t)}{2} + \frac{h_f}{2}\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right) \quad (٦)$$

بنابراین تنش محوری در لایهٔ بالایی و پایینی و تنش برشی در لایهٔ میانی برحسب کرنش‌های متناظر قابل محاسبه هستند.

$$\sigma_x^t = E_t \varepsilon_x^t$$
$$= E_t\left(\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} - \left(z - \frac{h_c + h_f}{2}\right)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right)$$
(۷)

$$\sigma_x^b = E_b \varepsilon_x^b$$
$$= E_b\left(\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} - \left(z + \frac{h_c + h_f}{2}\right)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right)$$
(۸)

$$\tau_{xz}^c = G_c \gamma_{xz}^c$$
$$= G_c\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \frac{2}{h_c}\left(\frac{u_1(x,t) - u_2(x,t)}{2} + \frac{h_f}{2}\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right)\right]$$
(۹)

که E، مدول یانگ لایه‌های بیرونی و G، مدول برشی لایهٔ میانی است.

استخراج معادلات حاکم

برای به دست آوردن معادلات حاکم از اصل همیلتون استفاده می‌کنیم.

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta U - \delta T)dt = 0$$
(۱۰)

که U، انرژی پتانسیل و T، انرژی جنبشی و t، زمان است. δT و δU از روابط (۱۱) و (۱۲) محاسبه می‌شوند.

$$\Delta t = \int_{V_t} \rho_t\left(\frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2}\delta u_t + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right)dV_t +$$
$$\int_{V_b} \rho_b\left(\frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2}\delta u_b + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right)dV_b$$
(۱۱)

$$\delta U = \int_{V_t} \sigma_x^t \delta\varepsilon_x^t \, dV_t + \int_{V_b} \sigma_x^b \delta\varepsilon_x^b \, dV_b \; +$$
$$\int_{V_c} \tau_{xz}^c \delta\gamma_{xz}^c \, dV_c$$
(۱۲)

با جایگذاری روابط (۱۱) و (۱۲) در رابطهٔ (۱۰) و استفاده از روابط (٤) تا (۹)، معادلات حاکم به‌صورت روابط (۱۳) تا (۱۵) به دست می‌آید.

$$-E_f A_f \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{G_c A_c}{h_c^2}\left[(h_f + h_c)\frac{\partial w}{\partial x} + (u_1 - u_2)\right] -$$

$$\rho A_f \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0$$
(۱۳)

$$-E_f A_f \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{G_c A_c}{h_c^2}\left[(h_f + h_c)\frac{\partial w}{\partial x} + (u_1 - u_2)\right] -$$
$$-\rho A_f \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0$$
(۱٤)

$$-\frac{G_c A_c (h_f + h_c)}{h_c^2}\left[(h_f + h_c)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\right]$$
$$+2E_f I_f\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right) - 2\rho A_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$
(۱۵)

در اینجا هندسه و خواص مکانیکی لایه‌های بیرونی یکسان است و با پایین‌نویس f نشان داده شده است، همچنین هندسه و خواص مکانیکی لایهٔ میانی با پایین‌نویس c نشان داده می‌شود. A سطح مقطع هر لایه و I ممان دوم سطح مقطع هر لایه است. شرایط مرزی در $x = 0, L$ در رابطهٔ (١٦) آورده شده است.

$$(\overline{AW})\delta w = 0;\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0;$$
$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\delta u_1 = 0;\ \ \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\delta u_2 = 0$$
(١٦)

که در آن

$$\overline{AW} = -2E_f I_f \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} +$$
$$\frac{G_c A_c (h_f + h_c)}{h_c^2}\left[(h_f + h_c)\frac{\partial w}{\partial x} + (u_1 - u_2)\right]$$

برای ابتدای تیر، نقطه $x = 0$، شرط مرزی گیردار برقرار است یعنی در این نقطه $w = \frac{\partial w}{\partial x} = u_1 = u_2 = 0$ است. برای انتهای تیر، نقطه $x = L$، شرط مرزی آزاد برقرار است یعنی در این نقطه $\overline{AW} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$ است.

به‌منظور حلِّ معادلات حاکم، (۱۳) تا (١٦)، از فرم متقارن هیدرودینامیک ذرات هموار یا (SSPH) استفاده

می‌شود. این روش بر پایهٔ بسط تیلور یک تابع در نقطه دلخواه بنا شده است و در ادامه جزئیات آن ارائه می‌شود.

فرم معادلات حاکم به روش SSPH

روش SSPH. بسط سری تیلور یک تابع اسکالر در حالت یک‌بعدی حول نقطهٔ دلخواه x را می‌توان به شکل رابطهٔ (۱۷) نشان داد.

$$f(\xi) = f(x) + (\xi - x)f'(x) + \frac{1}{2!}(\xi - x)^2 f''(x) + \frac{1}{3!}(\xi - x)^3 f'''(x) + \frac{1}{4!}(\xi - x)^4 f^{(IV)}(x) + \frac{1}{5!}(\xi - x)^5 f^{(V)}(x) + \frac{1}{6!}(\xi - x)^6 f^{(VI)}(x) \quad (۱۷)$$

که $f(\xi)$ مقدار تابع در نقطهٔ ξ که در نزدیکی نقطهٔ x قرار دارد، است. اگر جمله‌های مرتبهٔ صفر تا شش بسط را در نظر گرفته و از بقیهٔ جمله‌ها صرف‌نظر شود، رابطهٔ (۱۷) را می‌توان به شکل رابطهٔ (۱۸) نوشت.

$$f(\xi) = P(\xi, x)Q(x) \quad (۱۸)$$

که در آن،

$$Q(x) = \left[f(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{1}{2!}\frac{d^2f(x)}{dx^2}, \dots, \frac{1}{6!}\frac{d^6f(x)}{dx^6}\right]^T \quad (۱۹)$$

$$P(\xi, x) = [1, (\xi - x), (\xi - x)^2, (\xi - x)^3, \dots, (\xi - x)^6] \quad (۲۰)$$

تعداد جمله‌های مورد استفاده از بسط تیلور برحسب بیشترین مرتبهٔ موجود در معادلات حاکم مشخص می‌شود. برای محاسبهٔ مقادیر مجهول در $Q(x)$، طرفین رابطهٔ (۱۹) را در عبارت $W(\xi,x)P(\xi,x)^T$، ضرب می‌کنیم و برای هر نقطه در دامنهٔ تأثیر محاسبه می‌شود. $W(\xi,x)$ در اینجا تابع وزن است که در ساخت تابع شکل مورد نیاز شرکت می‌کند. در سیستم شماره‌گذاری نقاط در مختصات عمومی، فرض می‌کنیم تعداد نقاطی که در ناحیهٔ تأثیر $W(\xi,x)$ اعمال شده به نقطهٔ j ام قرار دارند، $r(j)$ باشد. رابطهٔ (۲۱) حاصل می‌شود.

$$\sum_{j=1}^{N(x)} f(\xi^{r(j)})\, W(\xi^{r(j)}, x) P(\xi^{r(j)}, x)^T = \sum_{j=1}^{N(x)} \left[P(\xi^{r(j)}, x)^T W(\xi^{r(j)}, x) P(\xi^{r(j)}, x)\right] Q(x) \quad (۲۱)$$

که $N(x)$ تعداد نقاط موجود در ناحیهٔ تأثیر $W(\xi,x)$ است. می‌توان رابطهٔ (۲۱) را به‌صورت رابطهٔ (۲۲) نوشت.

$$C(\xi - x)Q(x) = D(\xi - x)F^{(x)}(\xi - x) \quad (۲۲)$$

که در آن،

$$C(\xi - x) = P(\xi, x)^T W(\xi, x) P(\xi, x)$$
$$D(\xi - x) = P(\xi, x)^T W(\xi, x)$$

جواب معادلهٔ (۲۲) به‌صورت رابطهٔ (۲۳) است.

$$Q(x) = K(\xi, x)F(\xi) \quad (۲۳)$$

که در آن $K^{(x)}(\xi, x) = C(\xi - x)^{-1}D(\xi - x)$. رابطهٔ (۲۳) را می‌توان به فرم سری نشان داد

$$Q_I(x) = \sum_{J=1}^{M} K_{IJ}F_J\ ; \quad I = 1,2, \dots ,7 \quad (۲۴)$$

که M، تعداد نقاط و $F_J = f(\xi^J)$. هفت مؤلفه معادلهٔ (۲٤) در حالت یک‌بعدی در رابطهٔ (۲۵) آمده است.

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = n!\, Q_{n+1}(x) = \sum_{J=1}^{M} K_{IJ}F_J\ ; \quad I = n + 1 = 1,2, \dots ,7 \quad (۲۵)$$

جزئیات بیشتر در مورد روش SSPH در مرجع [11] آمده است.

گسسته‌سازی معادلات حاکم به روش SSPH

برای تحلیل ارتعاشات آزاد، توابع جابجایی را به شکل رابطهٔ (۲۷) در نظر می‌گیریم.

که در رابطهٔ (۲٦)، $j = \sqrt{-1}$ و ω فرکانس طبیعی است. درنهایت فرم گسسته معادلات حاکم، روابط (۱۳)

تا (۱۵)، به روش SSPH به فرم رابطهٔ (۲۷) تا (۲۹) تبدیل می‌شود.

$$\{u_1(x,t),u_2(x,t),w(x,t)\} = \{\bar{u}_1(x),\bar{u}_2(x),\bar{w}(x)\}e^{j\omega t}$$
(۲۶)

$$\frac{GA_c}{\rho h_c^2 A_f}\sum_{j=1}^{N^{(i)}}\left(k_{1j}\left[(\bar{u}_1)_j-(\bar{u}_2)_j\right]+(h_c+h_f)k_{2j}(\bar{w})_j\right) -\frac{E}{\rho}2!\sum_{j=1}^{N^{(i)}}k_{3j}(\bar{u}_1)_j-\omega^2\sum_{j=1}^{N^{(i)}}k_{1j}(\bar{u}_1)_j=0$$
(۲۷)

$$-\frac{GA_c}{\rho h_c^2 A_f}\sum_{j=1}^{N^{(i)}}\left(k_{1j}\left[(\bar{u}_1)_j-(\bar{u}_2)_j\right]+(h_c+h_f)k_{2j}(\bar{w})_j\right) -\frac{E}{\rho}2!\sum_{j=1}^{N^{(i)}}k_{3j}(\bar{u}_2)_j-\omega^2\sum_{j=1}^{N^{(i)}}k_{1j}(\bar{u}_2)_j=0$$
(۲۸)

$$\frac{4!\,EI_f}{\rho A_f}\sum_{j=1}^{N^{(i)}}k_{5j}\bar{w}_j - \frac{GA_c(h_c+h_f)}{2\rho h_c^2 A_f}\sum_{j=1}^{N^{(i)}}\left(k_{2j}\left[(\bar{u}_1)_j-(\bar{u}_2)_j\right]+(h_c+h_f)2!\,k_{3j}\bar{w}_j\right) -\omega^2\sum_{j=1}^{N^{(i)}}k_{1j}\bar{w}_j=0$$
(۲۹)

فرم گسسته سازی شده شرایط مرزی، رابطهٔ (۱۶)، نیز طبق رابطهٔ (۳۰) ارائه می‌شود.

$$\sum_{j=1}^{N^{(i)}}k_{1j}(\bar{u}_1)_j=\sum_{j=1}^{N^{(i)}}k_{1j}(\bar{u}_2)_j=\sum_{j=1}^{N^{(i)}}k_{1j}\bar{w}_j=0$$

$$\sum_{j=1}^{N^{(i)}}k_{2j}\bar{w}_j=0$$

$$\sum_{j=1}^{N^{(i)}}k_{2j}(\bar{u}_1)_j=\sum_{j=1}^{N^{(i)}}k_{2j}(\bar{u}_2)_j=2!\sum_{j=1}^{N^{(i)}}k_{3j}\bar{W}_j=0$$

$$-2EI_f3!\sum_{j=1}^{N^{(i)}}k_{4j}\bar{w}_j + \frac{GA_c(h_c+h_f)}{h_c^2}\sum_{j=1}^{N^{(i)}}\left(k_{1j}\left[(\bar{u}_1)_j-(\bar{u}_2)_j\right]+(h_c+h_f)k_{2j}(\bar{w})_j\right) = 0$$
(۳۰)

با اعمال شرایط مرزی روابط (۳۰) در معادلات حاکم (۲۷) تا (۲۹) به یک دستگاه معادلات به شکل رابطهٔ (۳۱) می‌رسیم.

$$\begin{bmatrix}[K_{bb}] & [K_{bd}]\\ [K_{db}] & [K_{dd}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{d^b\}\\ \{d^d\}\end{Bmatrix}=\omega^2\begin{Bmatrix}0\\ \{d^d\}\end{Bmatrix}$$
(۳۱)

که $[K_{bb}]$، ضرایب جملات نقاط مرزی در معادله‌های متناظر با نقاط مرزی و $[K_{bd}]$، ضرایب جملات نقاط مرزی در معادله‌های متناظر با نقاط درونی و $[K_{db}]$، ضرایب جملات نقاط درونی در معادله‌های متناظر با نقاط مرزی و $[K_{bb}]$، ضرایب جملات نقاط درونی در معادله‌های متناظر با نقاط درونی است. $\{d^b\}$، درجه‌های آزادی نقاط مرزی و $\{d^d\}$، درجه‌های آزادی نقاط درونی دامنهٔ حل تیر هستند که به‌صورت رابطهٔ (۳۲) نمایش داده می‌شوند.

$$\{d^b\}=\{\bar{u}_1(x_1),\quad \bar{u}_2(x_1),\quad \bar{w}(x_1),\quad \bar{w}(x_2),\quad \bar{w}(x_{N-1}),\quad \bar{u}_1(x_N),\quad \bar{u}_2(x_N),\quad \bar{w}(x_N)\}$$
$$\{d^d\}=\{\bar{u}_1(x_2),\quad \bar{u}_1(x_3),\dots,\quad \bar{u}_1(x_{N-1}),\quad \bar{u}_2(x_2),\quad \bar{u}_2(x_3),\dots,\quad \bar{u}_2(x_{N-1}),\quad \bar{w}(x_3),\quad \bar{w}(x_4),\quad \dots,\quad \bar{w}(x_{N-2})\}$$
(۳۲)

با ساده کردن معادلهٔ (۳۱)، این معادله به یک مساله مقدار ویژه استاندارد به شکل رابطهٔ (۳۳) تبدیل می‌شود.

$$\left[[K_{dd}]-[K_{db}][K_{bb}]^{-1}[K_{bd}]\right]\{d^d\}=\omega^2\{d^d\}$$
(۳۳)

اکنون یک دستگاه معادلات داریم که با حلِّ این دستگاه مقادیر فرکانس طبیعی گرافن دو لایه به دست خواهد آمد. با حل معادلهٔ حاصل، فرکانس‌های طبیعی گرافن دولایه به دست می‌آید. بر اساس روابط و معادله‌های به دست آمده و با استفاده از کُدنویسی در محیط نرم‌افزار متلب، فرکانس‌های طبیعی متناظر با

گرافن دولایه در نظر گرفته شده در این مطالعه به دست آمده است.

نتایج

در مراجع [15,16] اشاره شده است که صلبیت خمشی گرافن دو لایه در محدوده ۲/۱۴–۰/۸۳ الکترون‌ولت قرار دارد که در جدول (۱) تعدادی از آن‌ها آورده شده است. به‌عنوان اولین بخش از نتایج، سرعت همگرایی روش SSPH برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی اول و دوم تیر ساندویچی یک سر گیردار به طول ۱۰ نانومتر و عرض ۲ نانومتر و سایر خواص موجود در جدول (۲)، با ارائهٔ نتایج برحسب تعداد ذرّه در دامنهٔ حل در جدول (۳) نشان داده‌شده است. این جدول بیانگر سرعت همگرایی بالا به ازای تعداد ذرّه (نقاط گرهی) نسبتاً کم است. لازم به یادآوری است که در روند پاسخ، تابع وزنی $W(\xi,x)$ با استفاده از تابع اصلاح شده گوس به شکل رابطهٔ (۳٤) تعریف می‌شود.

$$W(\xi,x) = \frac{G}{\left(h\sqrt{\pi}\right)^{\lambda}}\begin{Bmatrix}(64-d^2)e^{-d^2} & 0\le d\le 9\\ 0 & d>9\end{Bmatrix};\quad d=|x-\xi|/h \qquad (۳٤)$$

که d، شعاع ناحیه تأثیر تابع وزن و h، طول مشخصه است. G و λ نیز پارامترهایی هستند که به دلیل نوع روش SSPH از طرفین معادله‌ها حذف می‌شوند و تأثیری در روند پاسخ نخواهند داشت. شایان یادآوری است که h برابر با 1.3Δ، که Δ کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه (گره) هم‌جوار است، به همراه d، طوری در نظر گرفته شده‌اند که کم‌ترین خطا در پاسخ حاصل شود.

جدول (۱): صلبیت خمشی گرافن [14]

روش محاسبه	صلبیت خمشی (**eV**)
تابع پتانسیل ایربو (AIREBO)	۰/۸۳
تابع پتانسیل ایربو	۱/۰۲
آزمایشگاهی	۱/۲۰
تابع پتانسیل ایربو	۱/٤
دی.اف.تی (DFT) (Density Functional Theory)	۱/٦۱
تابع پتانسیل دریدینگ (Dreiding)	۲/۱٤

جدول (۲): خواص مکانیکی و هندسی گرافن [14]

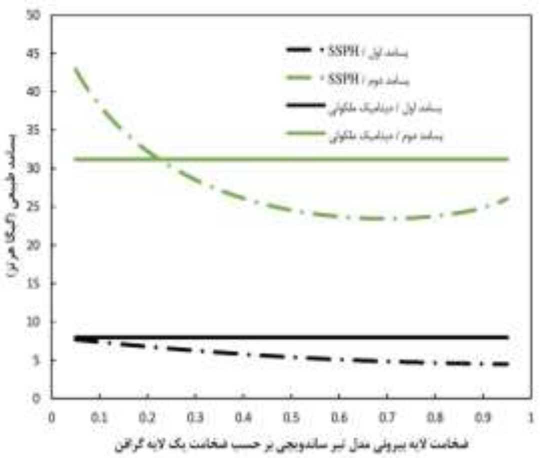
ویژگی	مقدار
ارتفاع کل گرافن دو لایه (nm)	۲×۰/۳۳۵
چگالی (kg/m^3)	۲۲٦۰
مدول الاستیسیته (E) (TPa)	۱
مدول برشی (G) (MPa)	۰/۲۵
کایرالیتی	آرمچیر

جدول (۳): همگرایی دو بسامد طبیعی اول گرافن

تعداد نقاط گرهی	۱۷	۱۹	۲۱	۲۳	۲۵	۲۷	۲۹
بسامد اول (GHz)	۷/۹۸	۷/۹۷	۷/۹۷	۷/۹٦	۷/۹٦	۷/۹٦	۷/۹٦
بسامد دوم (GHz)	۳۱/۱۱	۳۱/۰۹	۳۱/۰۸	۳۱/۰۸	۳۱/۰۷	۳۱/۰۷	۳۱/۰۷

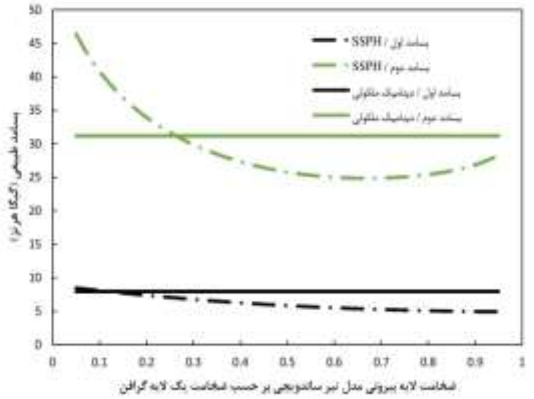
در شکل‌های (۲) تا (۷) نمودارهای مربوط به مدل‌سازی گرافن دو لایه با مدل تیر ساندویچی که معادلات حاکم به روش SSPH گسسته‌سازی شده است، در صلبیت‌های خمشی مختلف آورده شده است. خطوط افقی نتایج مربوط به شبیه‌سازی دینامیک مولکولی است که فرکانس طبیعی اوّل و دوم را به ترتیب ۷/۹۵ و ۳۱/۲ گیگاهرتز گزارش کرده است [14].

با توجّه به شکل‌های (۲) تا (۷)، مشاهده می‌شود که در صلبیت‌های خمشی مختلف، می‌توان با در نظر گرفتن ضخامت معیّنی برای رویه‌های بیرونی مدل تیر ساندویچی به نتایج مشابه با نتایج مدل شبیه‌سازی دینامیک مولکولی رسید. همچنین، نتایج به دست آمده با استفاده از روش SSPH به‌صورت کیفی با نتایج ارائهٔ شده در مقاله [14] تطابق خوبی دارد که در ادامهٔ این تطابق به لحاظ کمی نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

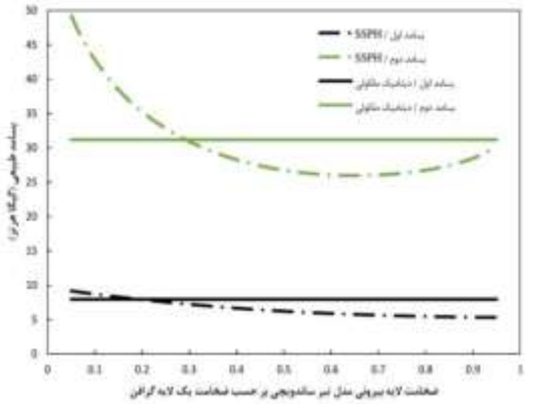


شکل (۲): تغییرات بسامد طبیعی گرافن دو لایه برحسب ضخامت لایهٔ بیرونی مدل تیر ساندویچی به روش SSPH در صلبیت خمشی ۰/۸۳ الکترون‌ولت. نتایج دینامیک مولکولی از مرجع [14] آورده شده است

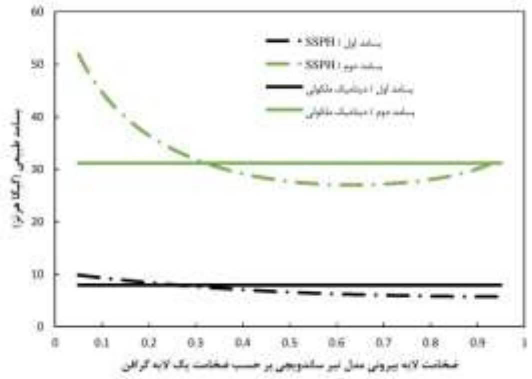
لازم به یادآوری است که واحد صلبیت خمشی گرافن (EI/b) الکترون‌ولت (eV) است که هر الکترون‌ولت تقریباً معادل 1.6×10-19 ژول است.



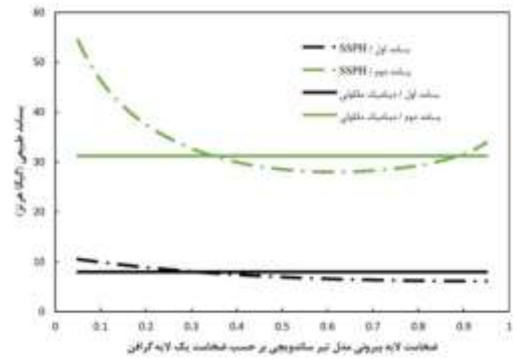
شکل (۳): تغییرات بسامد طبیعی گرافن دو لایه برحسب ضخامت لایهٔ بیرونی مدل تیر ساندویچی به روش SSPH در صلبیت خمشی ۱/۰۲ الکترون‌ولت. نتایج دینامیک مولکولی از مرجع [14] آورده شده است



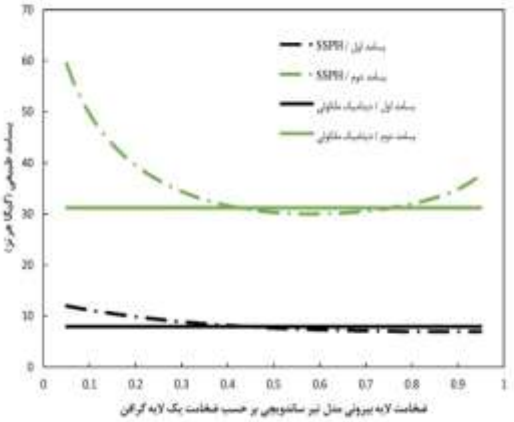
شکل (٤): تغییرات بسامد طبیعی گرافن دو لایه برحسب ضخامت لایهٔ بیرونی مدل تیر ساندویچی به روش SSPH در صلبیت خمشی ۱/۲۰ الکترون‌ولت. نتایج دینامیک مولکولی از مرجع [14] آورده شده است



شکل (۵): تغییرات بسامد طبیعی گرافن دو لایه برحسب ضخامت لایهٔ بیرونی مدل تیر ساندویچی به روش SSPH در صلبیت خمشی ۱/٤٠ الکترون‌ولت. نتایج دینامیک مولکولی از مرجع [14] آورده شده است



شکل (٦): تغییرات بسامد طبیعی گرافن دو لایه برحسب ضخامت لایهٔ بیرونی مدل تیر ساندویچی به روش SSPH در صلبیت خمشی ۱/٦۱ الکترون‌ولت. نتایج دینامیک مولکولی از مرجع [14] آورده شده است



شکل (۷): تغییرات بسامد طبیعی گرافن دو لایه برحسب ضخامت لایهٔ بیرونی مدل تیر ساندویچی به روش SSPH در صلبیت خمشی ۲/۱٤ الکترون‌ولت. نتایج دینامیک مولکولی از مرجع [14] آورده شده است

در جدول (٤) و (٥)، ضخامت‌های معادل به دست آمده از روش SSPH برای رویه‌های مدل تیر ساندویچی که برحسب ضخامت یک لایه گرافن است، به همراه بسامدهای اول و دوم متناظر با این ضخامت‌های معادل آورده شده است. همچنین نتایج به دست آمده در مدل تیر ساندویچی که معادلات حاکم آن به روش GDQM گسسته‌سازی شده و نتایج حاصل از مدل تیر چندگانه برشی، برای مقایسه افزوده شده‌اند.

جدول (٤): مقایسهٔ بسامد طبیعی اول در مدل تیر ساندویچی به روش SSPH و GDQM و مدل تیر چندگانه برشی با دینامیک مولکولی

صلبیت خمشی (الکترون‌ولت)	ضخامت معادل لایه‌های تیر ساندویچی h_f/h	بسامد طبیعی اول (GHz)					
		روش SSPH	درصد خطا	روش GDQM [14]	درصد خطا	مدل تیر چندگانه برشی [14]	درصد خطا
٠/۸۳	٠/۱۸	٦/۸٤	۱٤/٠	٦/۸۲	۱٤/۲	۷/۲۷	۸/۸
۱/٠۲	٠/۲۲	۷/۲۱	۹/۳	۷/۲٠	۹/٤	۷/٤٤	٦/٤
۱/۲٠	٠/۲٦	۷/٤۳	٦/٥	۷/٤۲	٦/۷	۷/۸٥	٤/۷
۱/٤	٠/۲۸	۷/۷٤	۲/٦	۷/۷٥	۲/٥	۷/۷٤	۲/٦
۱/٦۱	٠/۳۳	۷/۷۹	۲/٠	۷/۷۸	۲/۱	۷/۸۸	٠/۹
۲/۱٤	٠/٤۳	۷/۹٦	٠/۱	۷/۹٦	٠/۱	۸/۲۲	۳/٤

جدول (٥): مقایسهٔ بسامد طبیعی دوم در مدل تیر ساندویچی به روش SSPH و GDQM و مدل تیر چندگانه برشی با دینامیک مولکولی

صلبیت خمشی (الکترون‌ولت)	ضخامت معادل لایه‌های تیر ساندویچی h_f/h	بسامد طبیعی دوم (GHz) روش SSPH	درصد خطا	روش GDQM [14]	درصد خطا	مدل تیر چندگانه برشی [14]	درصد خطا
٠/٨٣	٠/١٨	٣٢/٩٧	٥/٧	٣٢/٩٨	٥/٧	٢٥/١٦	١٩/٤
١/٠٢	٠/٢٢	٣٢/٧٤	٤/٩	٣٢/٥٥	٤/٣	٢٦/٢٥	١٥/٩
١/٢٠	٠/٢٦	٣٢/١٨	٣/١	٣١/٩٧	٢/٥	٢٧/١٩	١٢/٩
١/٤	٠/٢٨	٣٢/٤٠	٣/٨	٣٢/٢٩	٣/٥	٢٨/١٩	٩/٦
١/٦١	٠/٣٣	٣١/٥٤	١/١	٣١/٥٤	١/١	٢٩/٢٠	٦/٤
٢/١٤	٠/٤٣	٣١/٠٨	٠/٤	٣٢/٠٠	٢/٦	٣١/٥٣	١/١

با توجّه به جدول‌های (٤) و (٥) مشاهده می‌شود که در مدل تیر چندگانه برشی در بسامد طبیعی اول، تنها در صلبیت‌های خمشی برابر با ١/٢٠ الکترون‌ولت و یا بیشتر و همچنین در بسامد طبیعی دوم تنها در صلبیت خمشی ٢/١٤ الکترون‌ولت است که نتایج با خطای کمتر از ۵ درصد اتّفاق می‌افتد؛ اما در مدل تیر ساندویچی در هر دو روش گسسته‌سازی SSPH و GDQM، خطای کمتر از ۵ درصد در بسامد اوّل طبیعی در صلبیت‌های خمشی مساوی و بیشتر از ١/٤٠ الکترون‌ولت و در بسامد طبیعی دوم تقریباً به ازای تمامی مقادیر صلبیت خمشی دیده می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت که به دلیل اثر برشی و ضخامت لایه‌ها در مدل تیر ساندویچی، نتایج در محدودهٔ وسیع‌تری نسبت به مدل تیر چندگانه برشی قابل قبول هستند.

در جدول (٦) ضخامت‌های معادل در مدل تیر ساندویچی به ازای هر دو روش حل SSPH و GDQM آورده شده است. مشاهده می‌شود که در روش SSPH به دلیل نوع روش حل و تأثیر تابع وزن در ساخت تابع شکل، ضخامت‌های معادل محاسبه شده مقدار کمتری نسبت به نتایج روش GDQM دارد و سهم بیشتری از ضخامت کل برای اثر برشی به کار گرفته شده است. به همین دلیل است که در جدول (٤) نتایج به دست آمده در بسامد طبیعی اوّل به روش SSPH به مقدار کمی، دقّت بیشتری نسبت به روش GDQM دارد. همچنین در بسامدهای طبیعی دوم در جدول (٥) مشاهده می‌شود که روش SSPH در صلبیت‌های خمشی ١/٦١ و ٢/١٤ الکترون‌ولت نیز دقّت بیشتری نسبت به روش GDQM دارد.

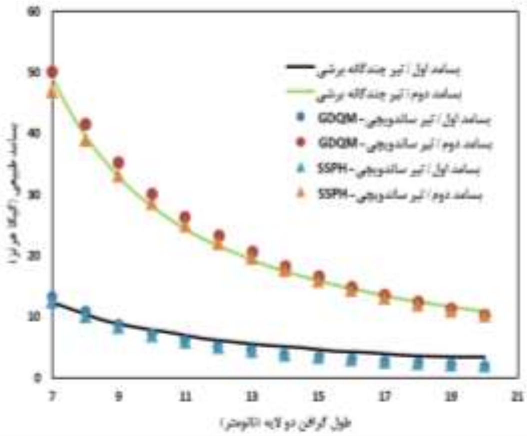
با توجّه به نتایج، ازآنجاکه در صلبیت‌های خمشی ١/٤٠، ١/٦١ و ٢/١٤ الکترون‌ولت هم مدل تیر ساندویچی و هم مدل تیر چندگانه برشی نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهند، در شکل‌های (٨) تا (١٠) بسامدهای طبیعی اوّل و دوم گرافن دو لایه برحسب طول‌های متفاوت از ٧ تا ٢٠ نانومتر نمایش داده شده است. در این شکل‌ها نتایج مدل تیر ساندویچی به ازای هر دو روش حل SSPH و GDQM آورده شده است. اختلاف مشاهده‌شده در صلبیت خمشی پایین‌تر در شکل‌های (٨) تا (١٠) بین نتایج مدل‌های تیر ساندویچی و تیر چندگانه برشی، ناشی از عدم وجود پارامتر برش در تیر چندگانه برشی است؛ اما در صلبیت‌های خمشی بالاتر این پارامتر اثر کمتری داشته و بنابراین نتایج به دست آمده از هرکدام روش‌های حل بسیار به یکدیگر نزدیک بوده و اختلاف جزیی دارند.

در انتها، با توجّه به جدول‌های (٤) و (٥)، و شکل‌های (٨) تا (١٠)، بیشترین همگرایی نتایج مدل تیر ساندویچی با شبیه‌سازی دینامیک مولکولی در صلبیت‌های خمشی ١/٦١ و ٢/١٤ الکترون‌ولت مشاهده می‌شود، دراین‌بین مدل تیر ساندویچی به روش SSPH به دلیل اختصاص دادن سهم بیشتری از ضخامت به اثر برشی، بیشترین و بهترین همخوانی را نسبت به روش

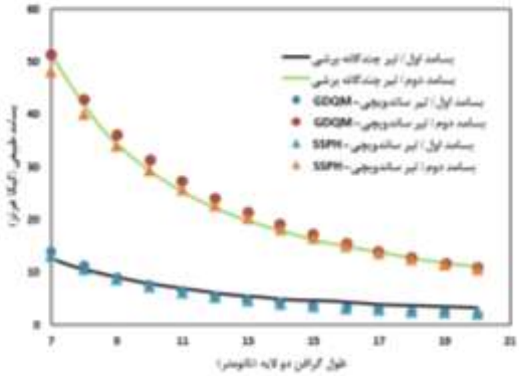
GDQM با نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی دارد. هرچند که روش حل SSPH و GDQM نتایج نزدیک به هم را ارائه می‌دهند اما در اینجا استفاده از روش گسسته‌سازی SSPH در مدل تیر ساندویچی منجر به نتایج به نسبت دقیق‌تری نسبت به روش گسسته‌سازی GDQM شده است. درنتیجه این مطالعه می‌تواند نماینده مسیری جدید در به‌کارگیری گسسته‌سازی معادلات حاکم به دست آمده از تئوری‌های مختلف با استفاده از روش‌های بدون مش مانند SSPH در تحلیل‌های ارتعاشاتی گرافن‌های چند لایه باشد.

جدول (٦): ضخامت‌های معادل برای رویه‌های مدل تیر ساندویچی

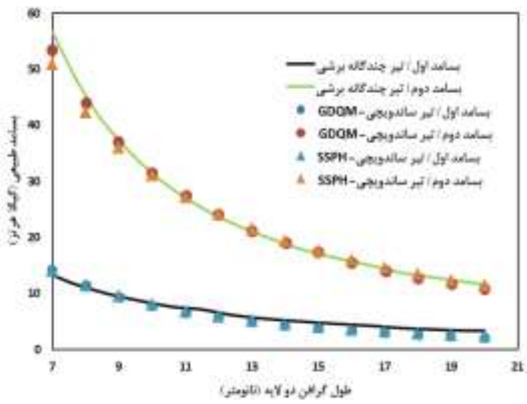
صلبیت خمشی (الکترون‌ولت)	h_f/h روش SSPH	h_f/h روش GDQM [14]
۰/۸۳	۰/۱۸	۰/۲۰
۱/۰۲	۰/۲۲	۰/۲۵
۱/۲۰	۰/۲٦	۰/۳۰
۱/٤	۰/۲۸	۰/۳۲۵
۱/٦۱	۰/۳۳	۰/٤۰
۲/۱٤	۰/٤۳	۰/۵۵



شکل (۸): تغییرات فرکانس طبیعی گرافن دولایه برحسب طول آن به ازای صلبیت خمشی برابر ۱/٤۰ الکترون‌ولت. نتایج تیر چندگانه برشی و GDQM از مرجع [14] آورده شده است



شکل (۹): تغییرات فرکانس طبیعی گرافن دولایه برحسب طول آن به ازای صلبیت خمشی برابر ۱/٦۱ الکترون‌ولت. نتایج تیر چندگانه برشی و GDQM از مرجع [14] آورده شده است



شکل (۱۰): تغییرات فرکانس طبیعی گرافن دولایه برحسب طول آن به ازای صلبیت خمشی برابر ۲/۱٤ الکترون‌ولت. نتایج تیر چندگانه برشی و GDQM از مرجع [14] آورده شده است

نتیجه‌گیری

در این مطالعه از روش گسسته‌سازی معادلات حاکم مدل تیر ساندویچی به روش SSPH برای بررسی ارتعاشات آزاد گرافن دو لایه، با هدف نمایش کارایی و دقّت این روش در حلِّ معادلات حاکم در تحلیل‌های ارتعاشاتی، استفاده شد. برای مقایسهٔ بهتر با سایر نتایج به دست آمده در مراجع، فرض‌های مشابه با این مراجع در نظر گرفته شد که شامل ثابت بودن فاصله نسبی بین لایه‌ها به هنگام ارتعاش، استفاده از تئوری تیر اویلر – برنولی برای مدل کردن لایه‌های گرافن، در نظر گرفتن

یک مدول برشی معادل برای مدل کردن اثر برشی میان صفحه‌ای در لایهٔ میانی تیر ساندویچی و همچنین احتساب جابجایی درون صفحه‌ای علاوه بر جابجایی عرضی است. در این مطالعه برای محاسبهٔ بسامدهای طبیعی اوّل و دوم گرافن دو لایه، معادلات حاکم بر تیر ساندویچی بر اساس روش SSPH گسسته‌سازی شد و نتایج به دست آمده با نتایج معادلات گسسته شده تیر ساندویچی به روش GDQM و نتایج تیر چندگانه برشی با نتایج حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی مقایسه شد. در صلبیت‌های خمشی بالا، مدل تیر ساندویچی و تیر چندگانه برشی با خطای ناچیزی نتایج منطبق بر شبیه‌سازی دینامیک مولکولی ارائه می‌دهند و دراین‌بین گسسته‌سازی معادلات حاکم تیر ساندویچی به روش SSPH با در نظر گرفتن ضخامت بیشتری برای مدل کردن اثر برشی، و همچنین امکان ارائه تابع شکل‌های مختلف، نسبت به مدل‌های دیگر نتایج دقیق‌تری را به دست می‌دهد. این مطالعه نشان می‌دهد که روش گسسته‌سازی بدون مش SSPH را می‌توان به‌عنوان روشی کارآمد در حل معادلات حاکم مربوط به تحلیل‌های ارتعاشاتی، استفاده کرد. البته برای مطالعهٔ موردی حاضر، با توجّه به نتایج محدود آزمایشگاهی و شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، انتخاب بهترین مدل و روش حل معادلات، نیازمند توسعهٔ تئوری‌ها و روش‌های حل معادلات و همچنین انجام آزمایش‌ها و تحقیقات بیشتری است.

واژه نامه

L	طول تیر
b	عرض تیر
h	ضخامت لایه
u	جابجایی در راستای طولی (**x**)
w	جابجایی در راستای ضخامت (**z**)
ε	کرنش نرمال
γ	کرنش برشی
σ	تنش نرمال
E	مدول یانگ لایه‌های بیرونی
G	مدول برشی لایه میانی
U	انرژی پتانسیل
T	انرژی جنبشی
t	زمان
A	سطح مقطع هر لایه
I	ممان دوم سطح مقطع
ω	فرکانس طبیعی
t	(بالانویس یا پایین نویس): مربوط به لایه بالایی
b	(بالانویس یا پایین نویس): مربوط به لایه پایینی
c	(بالانویس یا پایین نویس): مربوط به لایه میانی
f	(بالانویس یا پایین نویس): مربوط به لایه‌های بیرونی

مراجع

1. Liu, G. R., "Mesh free methods: moving beyond the finite element method", CRC Press, New York, (2003).
2. Vignjevic, R., and Campbell, J., "Review of development of the smooth particle hydrodynamics (SPH) method", *in Predictive Modeling of Dynamic Processes: Springer*, pp. 367-396, (2009).

3. Lucy, L. B., "A numerical approach to the testing of the fission hypothesis", *The Astronomical Journal*, Vol. 82, pp. 1013-1024, (1977).
4. Gingold, R. A., and Monaghan, J. J., "Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars", *Monthly notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 181, No. 3, pp. 375-389, (1977).
5. Monaghan, J. J., and Lattanzio, J. C., "A refined particle method for astrophysical problems", *Astronomy and Astrophysics*, Vol. 149, pp. 135-143, (1985).
6. Balsara, D. S., "Von Neumann stability analysis of smoothed particle hydrodynamics—Suggestions for optimal algorithms", *Journal of Computational Physics*, Vol. 121, No. 2, pp. 357-372, (1995).
7. Liu, M., Liu, G., and Lam, K., "Constructing smoothing functions in smoothed particle hydrodynamics with applications", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 155, No. 2, pp. 263-284, (2003).
8. Liu, W. K., Jun, S., and Zhang, Y. F., "Reproducing kernel particle methods", *International Journal for Mumerical Methods in Fluids*, Vol. 20, No. 8- 9, pp. 1081-1106, (1995).
9. Libersky, L. D., and Petschek, A. G., "Smooth particle hydrodynamics with strength of materials", *in Advances in the free-Lagrange method including contributions on adaptive gridding and the smooth particle hydrodynamics method*, Springer, pp. 248-257, (1991).
10. Libersky, L. D., Petschek, A. G., Carney, T. C., Hipp, J. R., and Allahdadi, F. A., "High strain Lagrangian hydrodynamics: a three-dimensional SPH code for dynamic material response", *Journal of Computational Physics*, Vol. 109, No. 1, pp. 67-75, (1993).
11. Zhang, G., and Batra, R., "Symmetric smoothed particle hydrodynamics (SSPH) method and its application to elastic problems", *Computational Mechanics*, Vol. 43, No. 3, pp. 321-340, (2009).
12. Hosseini Kordkheili, S., and Moshrefzadeh-Sani, H., "Mechanical properties of double-layered graphene sheets", *Computational Materials Science*, Vol. 69, pp. 335-343, (2013).
13. Liu, Y., Xu, Z., and Zheng, Q., "The interlayer shear effect on graphene multilayer resonators", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 59, No. 8, pp. 1613-1622, (2011).
14. Nazemnezhad, R., and Shokrollahi, H., "Free vibration analysis of bilayer graphenes with interlayer shear effect", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 131-138, (2014).
15. Liu, P., and Zhang, Y., "Temperature-dependent bending rigidity of grapheme", *Applied Physics Letters*, Vol. 94, No. 23, p. 231912, (2009).
16. Kang, J. W., and Lee, S., "Molecular dynamics study on the bending rigidity of graphene nanoribbons", *Computational Materials Science*, Vol. 74, pp. 107-113, (2013).